Interesting uses of trigonometric inequalities

ANTONIA, COSAR[a]

[a]COLEGIUL NAŢIONAL "VASILE LUCACIU", BAIA MARE, ROMANIA

Email addresses: cosarantoniamaria@gmail.com (ANTONIA, COSAR)

Abstract

A wise saying tells us that we ought to love our enemies despite the sorrow they've put us through. Thus, I chose to give trigonometry one more chance and I ended up being introduced to a whole other side of it, which helped me understand it at a much deeper level.
Through trigonometry, we are able to create unexpected bridges between algebra and geometry, fact that gives a rather unique magic to it.

Keywords: *inequalities, trigonometry*

1. Introducere

Ţinta materialului de faţă este să prezinte cititorului două dintre metodele mai puţin cunoscute, dar totuşi des întâlnite, de demonstrare a inegalităţilor sau a identităţilor trigonometrice.

Notaţiile sunt cele cunoscute:

- a, b, c – laturile triungiului ABC
- A, B, C – unghiurile triunghiului ABC
- R – raza cercului circumscris trunghiului ABC
- r – raza cercului înscris triunghiului ABC.

Simbolul $\sum$ este folosit în mod obişnuit, parcurgând toate elementele triunghiului care sunt precizate. De exemplu, $\sum a = a + b + c$.

2. Inegalităţi cu substituţii

Propoziţia 2.1. *Dacă* $A + B + C = k\pi, k \in \mathbb{Z}$*,* $A, B, C \neq (2k + 1)\dfrac{\pi}{2}$*, atunci*

$$\tan A + \tan B + \tan C = \tan A \tan B \tan C.$$

Propoziţia 2.2. *Dacă* $x, y, z \in (0, 1)$ *şi* $xy + yz + zx = 1$*, atunci există un triunghi ascuţitunghic* ABC*, astfel încât* $x = \tan \dfrac{A}{2}$*,* $y = \tan \dfrac{B}{2}$*,* $z = \tan \dfrac{C}{2}$.

Proof. Deoarece $x, y, z \in (0, 1)$, rezultă că există $\alpha, \beta, \gamma \in \left(0\,, \dfrac{\pi}{4}\right)$ astfel încât

$$\begin{cases} x = \tan \alpha \\ y = \tan \beta \\ z = \tan \gamma \end{cases} \tag{1}$$

ISSN

Din ipoteză rezultă că $x = \dfrac{1-yz}{y+z}$, deci

$$\tan = \frac{1-\tan\beta\tan\gamma}{\tan\beta\tan\beta} = \cot(\beta+\gamma).$$

Deoarece $\alpha, \dfrac{\pi}{2} - (\beta+\alpha) \in \left(0\,,\dfrac{\pi}{2}\right)$, obținem $\alpha = \dfrac{\pi}{2} - (\beta+\alpha)$, deci $\alpha+\beta+\gamma = \dfrac{\pi}{2}$. Alegem $A = 2\alpha, B = 2\beta, C = 2\gamma$. Atunci $A+B+C = \pi$ și $A, B, C \in \left(0\,,\dfrac{\pi}{2}\right)$. □

Propoziția 2.3. *Dacă $x, y, z \in (0,\infty)$ și $x+y+z = xyz$, atunci există un triunghi ascuțitunghic ABC, astfel încât $x = \tan A$, $y = \tan B$, $z = \tan C$.*

Proof.

$$\begin{cases} x = \tan\alpha \\ y = \tan\beta \\ z = \tan\gamma \end{cases} \tag{2}$$

Presupunând că $yz = 1$, din ipoteză obținem $y+z = 0$, deci $y^2 = -1$, fals. Ca urmare, $yz \neq 1$ și din ipoteză avem $x = \dfrac{y+z}{yz-1}$, deci $\tan\alpha = \dfrac{\tan\beta+\tan\gamma}{\tan\beta\tan\gamma-1}$ sau echivalent $\tan(-\alpha) = \tan(\beta+\gamma)$. Rezultă $\beta+\gamma = -\alpha+k\pi, k\in\mathbb{Z}$. Cum $\alpha+\beta+\gamma \in \left(0\,,\dfrac{3\pi}{2}\right)$, va rezulta $k = 1$, deci $\alpha+\beta+\gamma = \pi$. Alegem $A = \alpha, B = \beta, C = \gamma$ și proprietatea este demonstrată.

□

Propoziția 2.4. *Dacă $x, y, z \in (0,\infty)$ și $x^2+y^2+z^2+xyz = 4$, atunci există $A, B, C \in [0\,,\frac{\pi}{2})$, cu $A+B+C = \pi$, astfel încât $x = 2\cos A, y = 2\cos B, z = 2\cos C$.*

Proof. Deoarece $x, y, z > 0$, din relația dată deducem că $0 < x \leq 2, 0 < y \leq 2$. Atunci putem găsi $A, B \in [0, \frac{\pi}{2})$, astfel încât

$$\begin{cases} x = 2\cos A \\ y = 2\cos B \end{cases} \tag{3}$$

Ecuația $z^2+xyz+x^2+y^2-4 = 0$, cu necunoscuta z, are discriminantul $\delta = (4-x^2)(4-y^2) = 16\sin^2 A\sin^2 B \geq 0$. Deci $z = \dfrac{-4\cos A\cos B \pm 4\sin A\sin B}{2}$. Alegem $z = -2\cos(A+B) = 2\cos C$, unde $C = \pi - A - B$.

□

Problema 2.1. *Arătați că pentru toate valorie admisibile ale variabilelor $a, b, c \in \mathbb{R}$ are loc relația*

$$\frac{a-b}{1+ab} + \frac{b-c}{1+bc} + \frac{c-a}{1+ac} = \frac{a-b}{1+ab}\cdot\frac{b-c}{1+bc}\cdot\frac{c-a}{1+ac}$$

Soluție. Se observă de la o poștă că ar trebui să ne folosim de relația $\tan(u-v) = \dfrac{\tan u - \tan v}{1+\tan u\tan v}$. Există $x, y, z \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, astfel încât $a = \tan x, b = \tan y, c = \tan z$. Relația dată devine $\tan(x-y) + \tan(y-z) + \tan(z-x) = \tan(x-y)\cdot\tan(y-z)\cdot\tan(z-x)$, care este adevărată conform Propoziției 2.1, cu condiția $(x-y)+(y-z)+(z-x) = 0$.

Problema 2.2. *Fie $x, y, z \in (0,1)$, astfel încât $xy+yz+zx = 1$. Arătați că $\frac{x}{1-x^2} + \frac{y}{1-y^2} + \frac{z}{1-z^2} \geq \frac{3\sqrt{3}}{2}$.*

Soluție. Din Propoziția 2.2 rezultă că există un triunghi ABC ascuțitunghic astfel încât

$$\begin{cases} x = \tan \dfrac{A}{2} \\ y = \tan \dfrac{B}{2} \\ z = \tan \dfrac{C}{2} \end{cases} \tag{4}$$

Din convexitatea funcției tangente pe intervalul $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ deducem că

$$\tan\left(\frac{A+B+C}{3}\right) \leqslant \frac{\tan(A)+\tan(B)+\tan(C)}{3}.$$

Având în vedere că $A+B+C=\pi$ și $\tan(\pi)=\sqrt{3}$, rezultă că

$$\begin{aligned} 3\sqrt{3} &\leqslant \tan(A)+\tan(B)+\tan(C) \\ &= \frac{2\tan(\frac{A}{2})}{1-\tan^2(\frac{A}{2})} + \frac{2\tan(\frac{B}{2})}{1-\tan^2(\frac{B}{2})} + \frac{2\tan(\frac{C}{2})}{1-\tan^2(\frac{C}{2})}. \end{aligned}$$

Din (4) rezultă $\dfrac{x}{1-x^2}+\dfrac{y}{1-y^2}+\dfrac{z}{1-z^2} \geq \frac{3\sqrt{3}}{2}$, cu egalitate dacă triunghiul ABC este echilateral, adică $x=y=z=\frac{\sqrt{3}}{3}$.

Problema 2.3. *Determinați numerele reale a, b, c, d pentru care*

$$\begin{cases} a^2+b^2=9 \\ c^2+d^2=16 \\ ad+bc \geq 12, \end{cases} \tag{5}$$

cu condiția ca expresia $b+d$ să aibă valoare minimă.

Soluție. Considerăm $a=3\cos\alpha, b=3\sin\alpha, c=4\cos\beta, d=4\sin\beta$, unde $\alpha,\beta \in [0,2\pi]$. Din a treia relație din ipoteză deducem că $12\cos\alpha\sin\beta+12\sin\alpha\cos\beta \geq 12$. Având în vedere formula $\sin(x+y)=\sin x\cos y+\sin y\cos x$, rezultă că $\sin(\alpha+\beta)\geq 1$.
Din moment ce $\sin x \in [-1,1]$, devine evident că $\sin(\alpha+\beta)=1$. Obținem $\alpha+\beta=\frac{\pi}{2}$ sau $\alpha+\beta=\frac{5\pi}{2}$.

Problema 2.4. *Fie $x,y,z \in (0,\infty)$, astfel încât $x+y+z=xyz$. Arătați că:*

$$\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}+\frac{y}{\sqrt{1+y^2}}+\frac{z}{\sqrt{1+z^2}} \leq \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

Soluție. Din Propoziția 2.3 rezultă că există un triunghi ABC ascuțitunghic, astfel încât $x=\tan A, y=\tan B, z=\tan C$. Deoarece avem $\sin A=\dfrac{\tan A}{\sqrt{1+\tan^2 A}}$ și relațiile analoage, inegalitatea de demonstrat devine

$$\sin A+\sin B+\sin C \leq \frac{3\sqrt{3}}{2},$$

inegalitate cunoscută în triunghi.

3. Inegalitatea lui Gerretsen

Propoziția 3.1 (inegalitatea lui Gerretsen). *Au loc inegalitățile*

$$16Rr-5r^2 \leqslant p^2 \leqslant 4R^2+4Rr=3r^2,$$

unde notațiile sunt cele cunoscute.

Propoziţia 3.2 (inegalitatea lui Euler)**.** *Are loc inegalitatea*

$$R \geq 2r.$$

Propoziţia 3.3. *Avem următoarele formule utile*
a.) $\sum \cos A = 1 + \frac{r}{R}$
b.) $\sum \sin A = \frac{p}{R}$
c.) $\sum \cos B \cos C = \frac{p^2+r^2-4R^2}{4R^2}$
d.) $\sum \sin B \sin C = \frac{p^2+r^2+4Rr}{4R^2}$
e.) $\sum a^2 \cos A = \frac{r}{R}[3p^2 - (2R+r)(4R+r)]$

Problema 3.1. *Demonstraţi că* $\sum \dfrac{\cos^2 A}{\cos B \cos C} \geq 3.$

Soluţie. Aplicăm inegalitatea Cauchy-Buniakovsky-Schwarz şi astfel obţinem

$$\sum \frac{\cos^2 A}{\cos B \cos C} \geq \frac{(\cos A + \cos B + \cos C)^2}{\cos A \cos B + \cos B \cos C + \cos C \cos A},$$

unde înlocuim cu formulele (a), respectiv (c). Inegalitatea se reduce la a arăta că

$$\frac{4(R+r)^2}{p^2+r^2-4R^2} \geq 3$$

$$\iff p^2 \leq \frac{16R^2+r^2+8Rr}{3}$$

şi folosind inegalitatea lui Gerretsen, avem echivaleţele $3 \cdot (4R^2+4Rr+3r^2) \leq 16R^2+8Rr+r^2 \iff Rr+2r^2 \leq R^2$, inegalitate adevărată din inegalitatea lui Euler.

Problema 3.2. *Demonstraţi că* $\sum \dfrac{\sin B \sin C}{\sin A} \geq \dfrac{2S}{R}.$

Soluţie. Înlocuim sinusurile cu laturile triunghiului cu ajutorul teoremei sinusurilor, $a = 2R\sin A$. Apoi, folosim $\Sigma a^2b^2 = p^4 - 2p^2r(4R-r) + r^2(4R+r)^2$ şi $abc = 4Rrp$ şi inegalitatea devine echivalentă cu $p^2[p^2 - 2(4Rr+7r^2)] + r^2(4R+r)^2 \geq 0$, care se demonstrează uşor cu inegalitatea lui Gerretsen. Se obţine $(R-2r)(3R-r) \geq 0$, care este evident adevărată din inegalitatea lui Euler, deci problema este încheiată.

Problema 3.3. *Demonstraţi că* $\sum \dfrac{1}{\cos A} \geq 6.$

Soluţie. Din inegalitatea lui Euler, $R \geq 2r \iff 3R \geq 6r \iff \frac{3R}{r} \geq 6$. Ar rămâne de arătat că $\sum \dfrac{1}{\cos A} \geq \dfrac{3R}{r}$.
$\sum \dfrac{1}{\cos A} = \sum \dfrac{a^2}{a^2 \cos A} \geq \dfrac{a^2+b^2+c^2}{\sum a^2 \cos A}$.
t
Folosim identitatea (e). Deci,

$$\frac{4Rp^2}{\frac{r}{R}[3p^2-(2R+r)(4R+r)]} \geq \frac{3R}{r}$$

$$5p^2 \leq 3(8R^2+6Rr+r^2)$$

Aplicând inegalitatea lui Gerretsen obţinem

$$(R-2r)(2R+3r) \geq 0,$$

evident adevărată din inegalitatea lui Euler.

4. Alte aplicații ale trigonometriei

Trigonometria nu este folositoare strict matematicii, dimpotrivă, este probabil cea mai utilizată ramură a acesteia în multiple domenii, cum ar fi: inginerie, fizică, arhelologie, astronomie.

Trigonometria sferică este crucială în astronomie. Aceasta studiază poligoanele de pe sferă și relațiile dintre laturile şi unghiurile lor, şi este din motive evidente foarte importantă.

Coordonatele orizontale ale unui astru σ sunt : înălţimea deasupra orizontului (h) este unghiul format de direcţia spre astru cu planul orizontului. Adesea, în locul înălțimii, care este mai greu de măsurat se utilizează complementul ei $z = 90° - h$, numit distanţă zenitală, adică unghiul format de verticala locului cu direcţia spre astru.
Coordonatle orare ale unui astru σ sunt declinația (δ), care este unghiul format de raza corespunzătoare astrului cu planul ecuatorului ceresc și unghiul orar (H), care este unghiul format de meridianul ceresc al locului cu cercul orar al astrului

Propoziția 4.1 (Formula cosinusurilor)**.** *Triunghiurile sferice satisfac teorema:*

$$\cos\alpha = \cos\phi\cos\delta + \sin\phi\sin\delta\cos\alpha$$

unde α *,*δ*,*ϕ *sunt unghiurile triunghiului sferic.*

Problema 4.1. *Ce valoare trebuie să aibă declinația unui astru pentru ca el să treacă la meridian, la zenitul locului?*

Soluție. Condițiile impuse cer ca direcțiile OZ și $O\delta$σ să coincidă. Pentru că astrul trece la meridian, unghiul orar este $H = 0$. Aplicăm formula cosinusurilor cu $H = 0$ și obținem

$$\cos z = \cos\phi\cos\delta + \ sin\phi\sin\delta$$

$$\cos z = \cos(\delta - \phi)$$

$$z = \delta - \phi$$

Deoarece steaua trece la meridian, prin zenitul locului, avem $z = 0$, deci $\delta = \phi$.

5. Concluzii

Se observă că anumite probleme se pot demonstra mult mai usor cu ajutorul trigonometriei, iar unele probleme trigonometrice merg mână în mână cu geometria. Studiul trigonometriei este așadar foarte util, având în vedere că ne ciocnim de ea atât la concursuri, cât și în viața de zi cu zi.

References

[1] Marin Chirciu, *Inegalități trigonometrice*, Editura Paralela 45, 2016, Pitești;

[2] Nicolae Mușuroia, Aplicații ale trigonometriei în algebră, *Matematică de excelență*, Editura Paralela 45, 2019, Pitești;

[3] Nicu Goga,*Sistemul Solar - Astronomie pentru şcolari prin exerciţii şi probleme*, Editura Revers, 2010, Craiova.