From polynomial equations to complex numbers

NICOLETA, DANCIU, BOGDAN, IONUȚI[a]

[a]UNIVERSITATEA TEHNICĂ DIN CLUJ-NAPOCA
Facultatea de Științe
Specializarea: matematică-informatică
Email: danciunicoletadinuta06@gmail.com
bobi.hearthstone1@gmail.com

Abstract
In this work we present the first part of the history of complex numbers via the quadratic and cubic equation.

Keywords: *istoria matematicii, ecuații algebrice, numere complexe*

Introducere

La nivel școlar, algebra este o ramură a matematicii în care numerele necunoscute sunt reprezentate prin litere, operațiile aritmetice sunt reprezentate prin simboluri, iar sarcina principală este de a deduce valoarea cantităților necunoscute din ecuații. În matematica superioară , algebra se ocupă de proprietățile expresiilor simbolice ca atare, se ocupă de structură și formă, nu doar de numere. Aceasta perspectivă mai largă asupra algebrei a apărut atunci când matematicienii au început să cerceteze structura profundă a însuși procesului de rezolvare. Există dovezi indirecte cum că babilonienii rezolvau ecuații complicate încă de pe la 2000 î.Cr., cum ar fii ecuațiile pătratice. Abordarea babiloniană e exemplificată din tăblița BM 13901 „Am adunat de șapte ori latura pătratului și de unsprezece ori aria sa, obținând ...“[1]. [1]

Deși nu există dovezi concrete, pare plauzibil că babilonienii au avut ideea geometrică de completare a pătratului. Posibil o nevoie cum ar fii împrejmuirea grădinii i-a determinat pe babilonieni să se gândească la această idee

$$x^2 + 26x - 27 = 0$$

Era greu de conceput numărul “-27” (“ – “ era un operator), deci ei scriau:

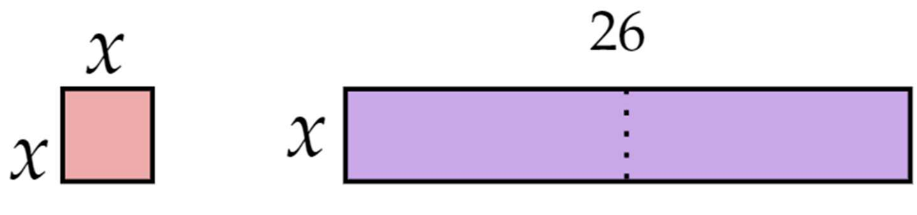

Fig. 1 Interpretarea geometrică a notațiilor x^2 și $26x$
Autor: Nicoleta Danciu

$$x^2 + 26x = 27$$

[1] JOUR, Høyrup, Jens, The old Babylonian square texts BM 13901 and YBC 4714. Retranslation and analysis, in Changing Views on Ancient Near Eastern Mathematics, vol 19, 2001, 155—218

Am adunat un pătrat de latură 13, deci 169 în ambii membri și atunci avem:

$$x^2 + 26x + 169 = 196$$
$$x^2 + 26x + 169 = 14^2$$
$$x^2 + 2 \cdot 13 \cdot x + 13^2 = 14^2$$
$$(x + 13)^2 = 14^2 \Rightarrow x = 1.$$

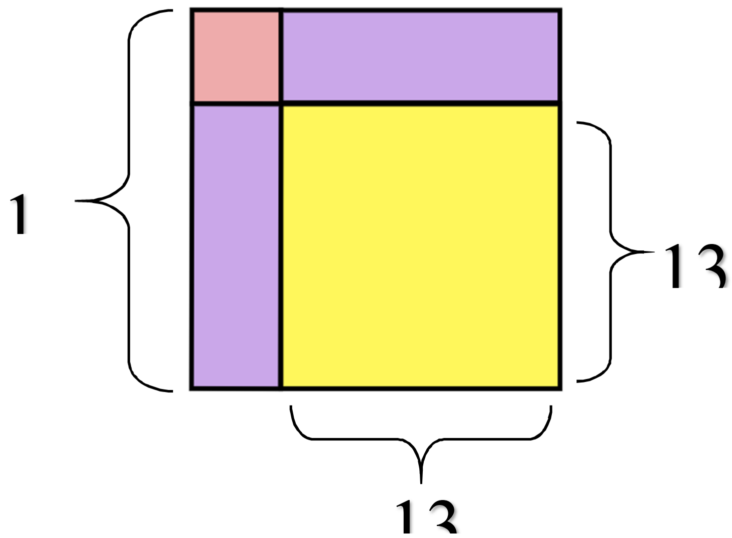

Fig. 2 Completarea pătratului
Autor: Nicoleta Danciu

Astfel, ei ar fi omis pe -27 ca fiind soluție.
Având ecuația de forma

$$ax^2 + bx = c,$$

cu acele valori particulare ale coeficienților a, b, c. Trebuie să-l deducem valoarea lui x. Conform metodei babiloniene, trebuie să parcurgem următorii pași:

Înmulțește c cu a, ceea ce dă ac.

Împarte b la 2, ceea ce dă $\frac{b}{2}$.

Ridică la pătrat $\frac{b}{2}$, ceea ce dă $\frac{b^2}{4}$.

Adună-l pe acesta la ac, ceea ce dă $ac + \frac{b^2}{4}$.

Extrage rădăcina pătrată $\sqrt{ac + \frac{b^2}{4}}$.

Scade $\frac{b}{2}$, ceea ce dă $\sqrt{ac + \frac{b^2}{4}} - \frac{b}{2}$

Împarte la a, iar răspunsul este

$$x = \frac{\sqrt{ac + \frac{b^2}{4}} - \frac{b}{2}}{a}.$$

Metoda prezentată mai sus este un caz particular al formulei generale pentru rezolvarea ecuației de grad *II*

$$ax^2 + bx + c = 0,$$

unde pentru $\Delta = b^2 - 4ac \geq 0$ se obțin soluțiile reale

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$
$$x_2 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Ecuații cubice

Pasul următor sunt ecuațiile cubice, implicând ridicarea necunoscutei la cub. Scriem asemenea ecuații sub forma

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0,$$

unde x e necunoscuta, iar coeficienții a , b , c , d sunt numere cunoscute.

Până la introducerea numerelor negative, matematicienii clasificau ecuațiile cubice în multe categorii diferite - așa încât, de exemplu, $x^3 + 3x = 7$ și $x^3 - 3x = 7$ erau considerate complet diferite și necesitau metode diferite de rezolvare.

Grecii au descoperit cum pot folosi secțiunile conice pentru a rezolva unele ecuații cubice. Algebra modernă arată că dacă două conice se intersectează, punctele de intersecție sunt determinate de o ecuație de gradul trei sau patru (în funcție de conice). Grecii nu cunoșteau acest fapt general , dar i-au exploatat consecințele în anumite condiții , folosind conicele drept un nou tip de instrument geometric. Această nouă abordare a fost completată și notată de persanul Omar Khayyam, cunoscut mai ales pentru poemul său Rubaiyat. Pe la 1075 el a clasificat ecuațiile cubice în 14 tipuri și a arătat cum se poate rezolva fiecare tip folosind conicele. Tratatul era un tur de forță în geometrie și lămurea aproape complet problema. Unele dintre cazurile lui Omar nu sunt complet rezolvate, deoarece el presupune că anumite puncte construite geometric există, deși nu se întâmplă așa (conicele nu se intersectează mereu). Ulterior, profesorul de matematică a lui da Vinci, Luca Pacioli, caracteriza cubicele în *Summa de Aritmetica*[2], spunând despre cubicele de forma $ax^3 + bx + c = 0$ că sunt imposibil de rezolvat, acestea având numele de cubice depresive.

Primul care a fost capabil de rezolvarea acestora a fost del Ferro, profesor la facultatea din Bologna, care după ce a făcut această descoperire științifică majoră nu a spus nimănui. Această situație a generat o legendă a cărei poveste este inedită.

Pe atunci, matematicienii își făureau reputația participând la competiții public. Fiecare concurent îi dădea adversarului probleme, iar cel care rezolva cele mai multe era declarat învingător. Publicul și concurenții pariau adesea sume mari și pe lângă bani, câștigătorul avea șanse mari să atragă elevi care plăteau, în special dintre nobili. L. del Ferro a ținut secretul multă vreme, dar în final i-a spus lui Fior, elevul său, care nu era la fel de talentat, ci era doar lăudăros. În 1535, Fior provoacă un matematician mult mai priceput decât el, Niccolo Fontana, poreclit Tartaglia. Se zvonea că Fior ar știi să rezolve cubicele depresive, dar Tartaglia nu-l credea în stare de așa ceva. Cu o săptămână înainte de concurs Tartaglia a descoperit cum să rezolve și celelalte tipuri de cubice. El a folosit ideea de completare a pătratului în spațiu [1].

Aflând de întrecere, Cardano și-a dat seama că cei doi concurenți găsiseră metodele de rezolvare a ecuațiilor cubice. Vrând să le cuprindă în cartea sa, l-a rugat pe Tartaglia să-i dezvăluie metodele. Firește, Tartaglia ezita, fiindcă mijloacele sale de trai depindeau de acestea, dar până la urmă s-a lăsat convins să divulge secretul. După spusele lui Tartaglia, Cardano i-a promis că nu va dezvălui public metoda. Cardano voia să rezolve cazul general de cubice $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$, care prin substituția $x = x - \frac{b}{3a}$

[2] https://en.wikipedia.org/wiki/Summa_de_arithmetica

$$a\left(x-\frac{b}{3a}\right)^3+b\left(x-\frac{b}{3a}\right)^2+c\left(x-\frac{b}{3a}\right)+d=0,$$

când desfacem parantezele toți termenii ce îl includ pe x^2 se reduc astfel obținând forma canonică:

$$ax^3+\left(c-\frac{b^2}{3a}\right)x+\left(d+\frac{2b^3}{27a^2}-\frac{bc}{3a}\right)=0,$$

care prin dezvăluirea lui Tartaglia poate fi rezolvat.

Pe bună dreptate Tartaglia a fost revoltat când ea a apărut în cartea lui Cardano *Ars magna – Marea artă a algebrei*, scrisă în cinci ani pentru a servi încă 500. S-a plâns amarnic și l-a acuzat pe Cardano de plagiat.

Cardano avea însă o scuză și un motiv temeinic de a-și încălca promisiunea făcută lui Tartaglia: elevul lui Cardano, Ludovico Ferrari, descoperise o metodă de rezolvare a ecuațiilor cvartice, cele implicând puterea a patra a necunoscutei. Era ceva cu totul nou și de o importanță uriașă. Desigur, Cardano voia să includă ecuațiile cvartice în cartea sa, din moment ce autorul descoperirii era elevul său.

Însă metoda lui Ferrari reducea rezolvarea ecuației cvartice la cea a unei ecuații cubice asociate, așa încât se baza pe rezolvarea ecuațiilor cubice, oferită de Tartaglia. Cardano nu putea publica rezultatele lui Ferrari fără a le publica și pe cele ale lui Tartaglia.

Apoi a primit vești care îl scoteau din încurcătură. Fior, care pierduse întrecerea publică cu Tartaglia, era elevul lui Scipio del Ferro. Cardano a aflat că del Ferro rezolvase toate cele trei tipuri de ecuații cubice, nu numai acela despre care îi vorbise lui Fior. Se zvonea că un anume Annibale del Nave deținea lucrările nepublicate ale lui del Ferro. Astfel, Cardano și Ferrari s-au dus la Bologna în 1543 să discute cu del Nave, au văzut lucrările – iar acolo se afla rezolvarea celor trei tipuri de cubice. Cardano putea deci spune cu mâna pe inimă că n-a publicat metoda lui Tartaglia, ci pe cea a lui del Ferro. [1]

Metoda del Ferro de rezolvare a cubicelor depresive

$$x^3+px=q$$

Prin geniul lui, del Ferro a intuit un rezultat faimos în matematică și anume că ecuațiile polinomiale de grad impar au cel puțin o soluție reală și atunci i-a venit ideea de a-l scrie pe x ca sumă de două numere reale u și v, deci pentru

$$x=u+v.$$

Se obțin egalitățile

$$u^3+v^3+3uv^2+3u^2v+p(u+v)=q$$
$$u^3+v^3+3uv(u+v)+p(u+v)=q$$
$$u^3+v^3+(u+v)(3uv+p)=q.$$

O soluție a egalității de mai sus se poate obține dacă

$$\begin{cases}u^3+v^3=q\\3uv+p=0,\end{cases}$$

atunci

$$v=-\frac{p}{3u}$$
$$u^3-\frac{p^3}{27u^3}=q\mid\cdot u^3$$
$$u^6-\frac{p^3}{27}=qu^3$$

$$u^6 - qu^3 - \frac{p^3}{27} = 0$$
$$u^3 = \frac{q}{2} \pm \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}$$
$$u = \sqrt[3]{\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}.$$

Din $v^3 = q - u^3$,

$$v = \sqrt[3]{\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}.$$

Dar $x = u + v$, de unde se obține soluția ecuației,

$$x = \sqrt[3]{\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}.$$

Tartaglia privea lucrurile altfel, dar nu putea răspunde la afirmația lui Cardano că rezolvarea era cea descoperită de del Ferro. Tartaglia a publicat o lungă și amară diatribă privind întreaga afacere, iar Ferrari, pentru a-și apăra maestrul, l-a provocat la un duel matematic. Ferrari l-a învins cu ușurință, iar Tartaglia nu și-a mai revenit niciodată după acest eșec.

Când scrie *Ars Magna*, Cardano dă peste ecuații de genul $x^3 = 15x + 4$. În cazul acestei ecuații, rezolvarea decurge bine până la aplicarea formulei, conform căreia se obține

$$x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}}.$$

Ajungând la un radical dint-un număr negativ, Cardano cere ajutorul lui Tartaglia, acesta răspunzându-i că nu știe să îi aplice formula, dar în realitate nici acesta nu știe cum să opereze cu astfel de numere.

Cel care i-a acordat o șansă a fost Rafael Bombelli, acesta realizând că putem scrie

$$\sqrt[3]{\left(a + b\sqrt{-1}\right)^3} + \sqrt[3]{\left(a - b\sqrt{-1}\right)^3},$$

de unde obținem

$$\begin{cases} 2 = a^3 - 3ab^2 \\ 11 = b\left(3a^2 - b^2\right). \end{cases}$$

Rezolvând sistemul, ajungem la $a = 1$ și $b = 2$.

Adică soluția va fi $2 + \sqrt{-1} + 2 - \sqrt{-1} = 4$.

Așadar acel număr care i-a pus în impas pe Cardano, Tartaglia și Ferrari nici măcar nu influența soluția finală.

Acesta a fost unul dintre primele contacte ale omenirii cu numerele complexe, urmând ca acestea să treacă prin diferite stadii de înțelegere la care au contribuit Wessel, Gauss și Hamilton.

În 1799, Wessel a fost prima persoană care a descris interpretarea geometrică a numerelor complexe în planul complex și vectori. În același timp, Gauss lucra la același lucru, dar separat. Euler vedea numerele complexe ca puncte în plan, iar când opera cu astfel de numere folosea notația

$$i = \sqrt{-1}.$$

Hamilton a fost cel care a definit numerele complexe riguros din punct de vedere algebric ca fiind perechi de numere reale ordonate (a, b) și a definit operații algebrice de adunare și înmulțire

$$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$$
$$(a, b)(c, d) = (ac - bd, bc + ad).$$

Concluzii

Munca matematicienilor din Renașterea italiană și contribuțiile lui Wessel și Gauss au fost pașii premergători pentru elaborarea teoriei numerelor complexe.

Așadar, matematica nu trebuie privită ca o structură rigidă, drept dovadă ecuațiile care în trecut erau considerate imposibil de rezolvat, acum sunt rezolvate de elevi de clasa a VII-a. Numerele care mai demult erau considerate o blasfemie, acum sunt folosite în fizică, inginerie și artă, în studiul oscilațiilor, vibrațiile autoturismelor și transmiterea curentului electric alternativ.

Bibliografie

[1] I. Stewart, Taming the Infinite. The story of mathematics Traducere Narcisa Gutium, Îmblânzirea infinitului: povestea matematicii, București: Humanitas, 2011, pp. 63-169.