Study of the eigenvalues of Sturm-Liouville problems under perturbations

OCTAVIA-MARIA, HAPENCIUC
UNIVERSITATEA TRANSILVANIA DIN BRAȘOV
Facultatea de Matematică și Informatică
Specializarea: Structuri Matematice Fundamentale
Email: codrinamaria09@gmail.com

Coordonator:
Prof. Univ. Dr. Marin Marin
Email: m.marin@unitbv.ro
Universitatea Transilvania din Brașov.

Abstract:
This research paper aims to investigate how the eigenvalues of Sturm-Liouville problems behave when the differential equation or coefficients are subjected to perturbations. Specifically, the study seeks to examine the continuity of eigenvalues concerning these perturbations.

The research involves theoretical analysis, numerical simulations using Python and MATLAB programming languages, and potential development of new mathematical techniques to characterize the behavior of eigenvalues.
Keywords: eigenvalues, eigenfunctions, perturbations, potetial function, differential equations.

Introducere

În această lucrare studiem problemele regulate Sturm-Liouville cu condiții la limită auto-adjuncnte. Există două metode de bază disponibile pentru astfel de studii: teoria operatorilor și teoria funcțiilor complexe. În această lucrare este utilizată teoria operatorilor pentru a da estimări mai bune ale autovalorilor problemelor Sturm-Liouville atunci când perturbăm funcția potential.

Secțiunea preliminară

Pornind de la rezultatele lui P. Kosowski din [6] și [8], generalizăm rezultatele principale ale acestor articole pentru probleme Sturm–Liouville de forma următoare

$$-x'' + qx = \lambda rx \quad \text{pe}[a, b], \quad [1]$$

cu condițiile la limită

$$\alpha x(a) + \alpha' x(a) = 0, \;\; \beta x(b) + \beta' x(b) = 0$$

unde $\alpha, \alpha', \beta, \beta' \in \mathbb{R}$.

Vom presupune că lucrăm pe mulțimea numerelor reale și că sunt satisfăcute următoarele proprietăți:

1. $p(t)$ este continuu diferențiabilă pe $[a, b]$ și $p(t) > 0, \forall t \in [a, b]$
2. $q(t)$ este o funcție continuă pe $[a, b]$

ISSN

3. $r(t)$ este continuu diferențiabilă pe $[a, b]$ și $r(t) > 0, \forall t \in [a, b]$
4. $|\alpha| + |\beta| > 0$ și $|\alpha'| + |\beta'| > 0$.

Considerăm mulțimea

$$D = \{x \in L^2[a, b]: x, x' \text{ continue și } x'' \in L^2[a, b],\ \alpha x(a) + \alpha' x(a) = 0,\ \beta x(b) + \beta' x(b) = 0\}.$$

Pentru $x \in D$ considerăm operatorii

$$\begin{cases} Lx = -x'' + q(t)x, \\ \tilde{L}x = -x'' + \tilde{q}(t)x, \end{cases} \quad [2]$$

unde q și $\tilde{q}$ sunt în $C[a, b]$.

Fie λ_k autovaloarea de ordinul k a primei probleme și $\tilde{\lambda}_k$ autovaloarea de ordinul k a celei de-a doua probleme $k = 1,2,3, \ldots$.

Rezultate principale

Teorema 1. Dacă $\|q - \tilde{q}\|_\infty = \sup_{t\in[a,b]}|q(t) - \tilde{q}(t)| \le \varepsilon$ atunci $|\lambda_k - \tilde{\lambda}_k| \le \varepsilon,\ \forall k = 1,2 \ldots$.

Demonstrație. Avem $-\varepsilon \le q(t) - \tilde{q}(t) \le \varepsilon$ pentru fiecare t din $[a, b]$. Este suficient să luăm în considerare doar una dintre inegalități, de exemplu, cea din dreapta $q(t) \le \varepsilon + \tilde{q}(t), \quad t \in [a, b]$. Este binecunoscut faptul că fiecare valoare proprie a problemei Sturm–Liouville satisface principiul minmax al lui Poincaré, care afirmă că

$$\lambda_k = \min_{H_k \subset D} \max_{0 \ne x \in H_k} \frac{\langle Lx, x\rangle}{\langle x, x\rangle},$$

unde H_k reprezintă orice subspațiu k-dimensional al lui D, iar $R[x]$ este raportul lui Rayleigh pentru prima problemă considerată, adică,

$$R[x] = \frac{\langle Lx, x\rangle}{\langle x, x\rangle},$$

unde $N[x] = \langle Lx, x\rangle$ și $D[x] = \langle x, x\rangle$.

Integrând prin părți calculăm

$$N[x] = \int_a^b (-x'' + qx)\, xr\, dt = \int_a^b (x'^2 + qx^2)\, r\, dt - [xx'r]_a^b + \int_a^b r' xx'\, dt.$$

Condițiile la limită sunt normale și separate, deci problema este bine definită. Mai precis, dacă notăm $BC \equiv -[xx'r]_a^b$, atunci termenul BC poate fi exprimat astfel ca $BC = Bx^2(b) - Ax^2(a)$, unde constantele A, B sunt reale, de unde

$$\lambda_k = \min_{H_k \subset D} \max_{0 \ne x \in H_k} \frac{\int_b^a (x'^2 + qx^2)\, r\, dt + \int_a^b r' xx'\, dt + BC}{\int_b^a x^2\, r\, dt}$$

$$\le \min_{H_k \subset D} \max_{0 \ne x \in H_k} \frac{\int_b^a (x'^2)\, r\, dt + \int_b^a (\tilde{q} + \varepsilon)\, x^2 r\, dt + \int_a^b r' xx'\, dt + BC}{\int_b^a x^2\, r\, dt} = \tilde{\lambda}_k + \varepsilon.$$

Similar obținem că $\tilde{\lambda}_k \le \lambda_k + \varepsilon$, de unde $|\lambda_k - \lambda_{\tilde{k}}| \le \varepsilon$. Acest lucru completează demonstrația. □

Corolarul 1. Presupunem că funcția q din problema neperturbată din relația [2] depinde de un parametru p cu o constantă Lipschitz $C > 0$, astfel încât $|q(t, s) - q(t, p)| \le C|s - p|$, $t \in [a, b]$, $s, p \in \mathbb{R}$. Atunci fiecare λ_k depinde continuu de p cu aceeași constantă Lipschitz.

Demonstrație. Pentru s și p fixați, este suficient să luăm $\varepsilon = C|s - t|$ și să aplicăm teorema Teorema 1, obținând astfel

$$|\lambda_k(s) - \lambda_k(p)| \le C|s - p| \quad \forall k = 1,2, \dots$$

□

Pentru a simplifica discuția, ajută să presupunem că L este un operator pozitiv, ceea ce, conform teoremei Courant-Fischer-Poincare, este echivalent cu a avea o cea mai mică valoare proprie $\lambda_1 > 0$. Aceasta poate fi realizată înlocuind $q(t)$ cu $q(t) + \lambda^*$, unde λ^* este astfel încât $\lambda^* + \lambda_1 > 0$; acest lucru doar deplasează toate valorile proprii în sus cu λ^* fără a schimba esențial problema. De acum înainte, facem presupunerea menționată mai sus; astfel, șirul de valori proprii $\{\lambda_i\}_{i=1}$ satisface încă o inegalitate:

$$0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < \cdots$$

Să notăm cu F operatorul simetric mărginit $Fx = (q - \tilde{q})x$ definit pentru $t \in L^2_r(a, b)$. Începem cu o lemă simplă, ce ne oferă o estimare a normei operatorului pentru eroarea relativă.

Lemă 1. Conform presupunerii de mai sus, următoarea inegalitate este valabilă, pentru fiecare $k = 1,2,3, \dots$

$$\left|\frac{\tilde{\lambda}_k - \lambda_k}{\lambda_k}\right| \le ||L^{-1}|| \cdot ||F||.$$

Demonstrație. Din Teorema Teorema 1 rezultă că

$$\left|\widetilde{\lambda_k} - \lambda_k\right| \le \| \tilde{q} - q \|_\infty = \| F \|_{L^2_r}.$$

Să observăm că

$$\left|\frac{\tilde{\lambda}_k - \lambda_k}{\lambda_k}\right| \le \| F \| \cdot \frac{1}{\lambda_1} = \| F \| \cdot \| L^{-1} \|.$$

□

Teorema 2. Conform presupunerii de mai sus, următoarea inegalitate este valabilă, pentru fiecare $k = 1,2,3, \dots \left|\frac{\tilde{\lambda}_k - \lambda_k}{\lambda_k}\right| < \rho(L^{-1}F)$, unde ρ reprezintă raza spectrală.

Demonstrație. Este cunoscut faptul că $L^{-1}: C([a, b]) \to D$ există și este un operator integral cu un nucleu continuu, prin urmare extensia sa pe $L^2_r(a, b)$ este compactă. L^{-1} este de asemenea pozitiv definit, deci are rădăcina pătrată unică $L^{-\frac{1}{2}}$, care este un operator pozitiv definit. Fie $\hat{F} = L^{-\frac{1}{2}} F L^{-\frac{1}{2}}$. Este binecunoscut faptul că fiecare valoare proprie a problemei Sturm-Liouville satisface principiul minmax al lui Poincaré, care afirmă că

$$\lambda_k = \min_{H_k \subset D, \dim(H_k) = k} \max_{x \in H_k \setminus \{0\}} \frac{\langle Lx, x \rangle}{\langle x, x \rangle},$$

unde H_k reprezintă orice subspațiu de dimensiune k a lui D.

Deoarece $\langle Lx, x \rangle > 0$ pentru $0 \neq x \in D$, putem scrie raportul lui Rayleigh pentru ecuația perturbată astfel:

$$\hat{R}[x] = \frac{\langle \tilde{L}x, x \rangle}{\langle x, x \rangle} = \frac{\langle Lx, x \rangle}{\langle x, x \rangle} \cdot \left(1 + \frac{\langle Fx, x \rangle}{\langle Lx, x \rangle}\right).$$

Este ușor de verificat că

$$\frac{\langle Fx, x \rangle}{\langle Lx, x \rangle} = \frac{\langle \hat{F}\hat{x}, \hat{x} \rangle}{\langle \hat{x}, \hat{x} \rangle}$$

unde $0 \neq x \in L^2([a, b])$ este definit ca $L^{-\frac{1}{2}}x - x$. Deoarece $\hat{F}$ este și auto-adjunct, avem

$$F^* = F,$$

ceea ce implică că

$$\langle Fx, x \rangle = \langle x, Fx \rangle.$$

Acest lucru ne oferă

$$\left|\frac{\langle \hat{F}\hat{x}, \hat{x} \rangle}{\langle \hat{x}, \hat{x} \rangle}\right| \le \|\hat{F}\| = \rho(\hat{F}).$$

Deoarece $\rho(AB) = \rho(BA)$ cu condiția ca A și B să fie mărginite, vedem că

$$\rho(\hat{F}) = \rho\left(L^{-\frac{1}{2}} F L^{-\frac{1}{2}}\right) = \rho(L^{-1}F).$$

Din cele de mai sus rezultă că

$$R[x]\big(1 - \rho(L^{-1}F)\big) \leq \hat{R}[x] \leq R[x]\big(1 + \rho(L^{-1}F)\big).$$

Aplicând caracterizarea "minmax", deducem că

$$\lambda_k\big(1 - \rho(L^{-1}F)\big) \leq \tilde{\lambda}_k \leq \lambda_k\big(1 + \rho(L^{-1}F)\big)$$

și astfel

$$\left|\frac{\lambda_k - \tilde{\lambda}_k}{\lambda_k}\right| \leq \rho(L^{-1}F)),$$

care este estimarea dorită. □

Exemplul 1. În acest exemplu perturbăm operatorul $L = -\frac{d^2}{dt^2}$ la operatorul $\tilde{L} = -\frac{d^2}{dt^2} + \tilde{q}$ cu aceleași condiții la limită $u(0) = u(\pi) = 0$, unde funcția $\tilde{q} = \tilde{q}(t)$ este după cum urmează:

$$\tilde{q}(t) = \begin{cases} 2t, & \text{pentru } t \in (0, \frac{1}{2}] \\ 1, & \text{pentru } t \in \left[\frac{1}{2}, \pi - \frac{1}{2}\right] \\ 2(\pi - t), & \text{pentru } t \in \left[\pi - \frac{1}{2}, \pi\right]. \end{cases}$$

Pentru problema Sturm-Liouville neperturbată avem valorile proprii $\lambda_k = k^2$ și funcțiile proprii $x_k(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin(kt)$ (unde $k = 1,2, ...$). Metoda de calcul rămâne aceeași și rezultatele sunt prezentate în tabelul de mai jos:

k	$\tilde{\lambda}_k$	$\left\|\frac{\lambda_k - \tilde{\lambda}_k}{\lambda_k}\right\|$	$\rho(L^{-1}F))$,	$\|\|L^{-1}\|\| \cdot \|\|F\|\|$
1	1.98691	0.98691	0.98742	1
2	4.95277	0.23819	0.98742	1
3	9.91021	0.10113	0.98742	1

Exemplu 2. Un contraexemplu care demosntrează necesitatea utilizării normei infinit pentru funcția potențial. Utilizarea normei L^2 nu ne conduce la aceleași rezultate; adică estimarea

$$||\lambda_k - \tilde{\lambda}_k|| \leq ||q - \tilde{q}||_2,$$

unde

$$||f||_2 = \left(\int_a^b |f(t)|^2 \, dt\right)^{\frac{1}{2}}$$

nu este valabilă.

Să luăm în considerare două ecuații $-u'' + q_1(t)u = \lambda u$ și $-u'' + q_2(t)u = \lambda u$ pe intervalul $[0,1]$, unde $q_1(t) = 0.1 \cdot t$ și $q_2(t) = 0.1 \cdot t^2$, cu aceleași condiții la limită $u(0) = u(1) = 0$. Vom calcula o aproximare a celei mai mici valori proprii ale acestor ecuații. Apoi, rezultatele cu acuratețea de 5 zecimale sunt următoarele:

$\lambda_1^{(1)} = 9.91959, \lambda_1^{(2)} = 9.89786.$
Astfel, diferența $\left|\lambda_1^{(1)} - \lambda_1^{(2)}\right| = 0.02173$ este mai mare decât $10^{-3} = 0.001$.

Exemplu 3. Problema lui Schrödinger – Oscilatorul armonic.

Considerăm ecuația oscilatorului armonic

$$-x'' + \frac{1}{2}t^2 x = \lambda x, \quad x \to 0, |t| \to \infty.$$

Acest exemplu este un model bun pentru anumite sisteme oscilante din fizică și mecanică.

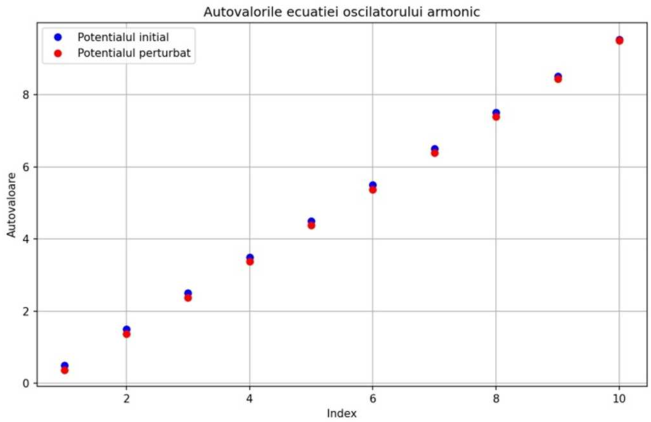

Fig.1. Autovalorile problemei inițiale și autovalorile problemei perturbate liniar cu factorul 0.5. (Python). Autor: Octavia-Maria Hapenciuc

Exemplu 4. O problemă de dinamică structurală.

Considerăm o coardă uniformă de lungime L fixată la ambele capete. Funcția $u(x)$ reprezintă deplasarea verticală de-a lungul lungimii sale, iar $\rho(x)$ denote densitatea variabilă a coardei.

Problema Sturm-Liouville care generează vibrația acestei coarde poate fi descrisă de următoarea ecuație diferențială:

$$-EI\frac{d^2}{dx^2}u(x) + \rho(x)u(x) = \lambda u(x)$$

unde:

- E este modulul de elasticitate al materialului coardei,
- I este al doilea moment de arie al secțiunii transversale a coardei,
- $\rho(x)$ este densitatea variabilă a materialului coardei, și
- λ este parametrul valorii proprii care reprezintă frecvențele naturale ale vibrației.

Condițiile la limită pentru această problemă sunt:

$$u(0) = 0 \quad \text{și} \quad u(L) = 0$$

unde 0 și L sunt capetele fixate ale coardei.

În acest exemplu, presupunem că densitatea coardei variază liniar de-a lungul lungimii sale, dată de:

$$\rho(x) = \rho_0 + \alpha x$$

unde ρ_0 este densitatea constantă coardei și α este un coeficient care reprezintă rata de schimbare a densității pe unitatea de lungime.

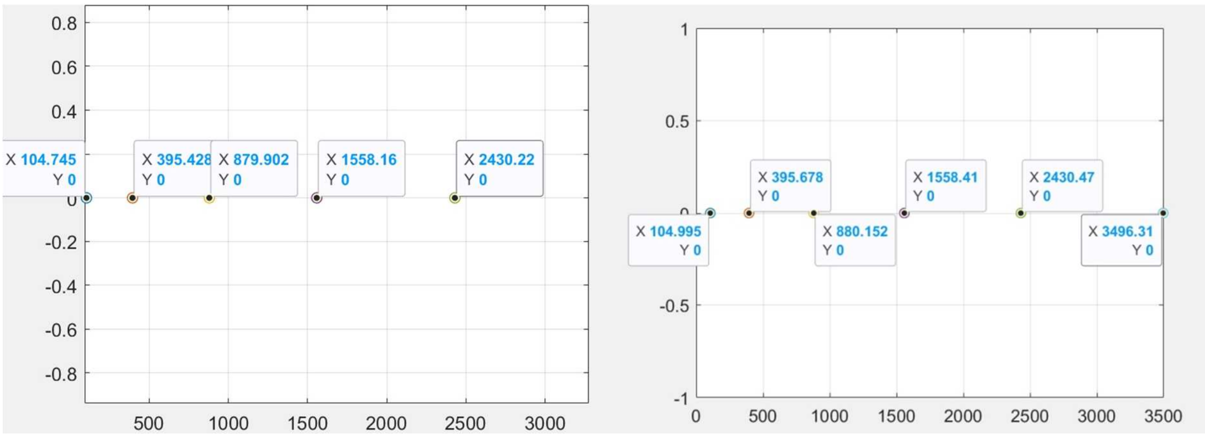

Fig. 2. Autovalorile problemei inițiale și ale problemei perturbate cu factorul α=0.5 (Matlab). Autor: Octavia-Maria Hapenciuc

```
|Diferenta dintre autovalori|
Autovaloarea 1: 0.24997183568076764
Autovaloarea 2: 0.25000840086613607
Autovaloarea 3: 0.2500050055615475
Autovaloarea 4: 0.2500030664236874
Autovaloarea 5: 0.2500020372340259
Autovaloarea 6: 0.2500014432548596
Autovaloarea 7: 0.2500010732055671
Autovaloarea 8: 0.25000082809674495
Autovaloarea 9: 0.2500006580921763
Autovaloarea 10: 0.25000053516305343
```

Fig. 3. Modulul diferenței dintre autovalori (Python). Autor: Octavia-Maria Hapenciuc

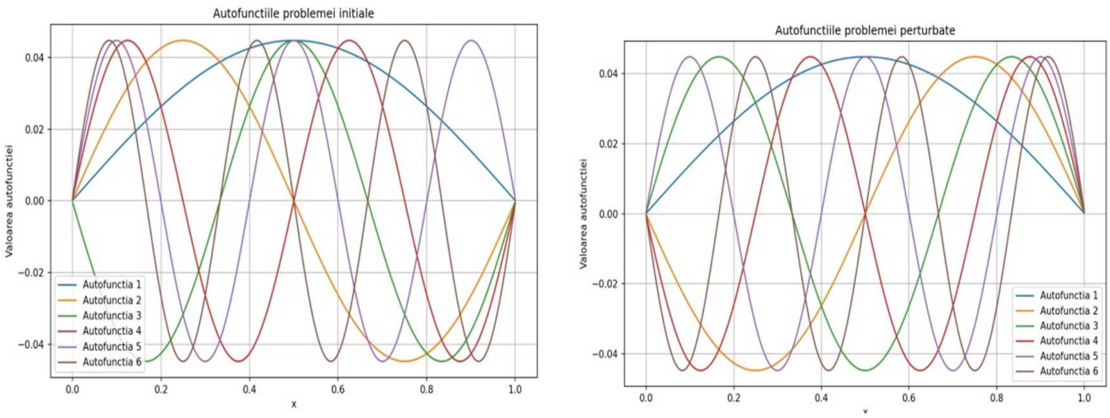

Fig. 4. Autofuncțiile problemei inițiale și ale problemei perturbate cu factorul α=0.5 (Python). Autor: Octavia-Maria Hapenciuc

Bibliografie

[1] A. Zettl, *"Sturm-Liouville Problems"*, Mathematics Department, Northern Illinois University, DeKalb, Illinois 60115. E. A. Coddington and A. Zettl, *Hermitian and anti-Hermitian properties of Green's matrices.*, Pacific J. Math. 18 (1966), 451-454.

[2] J. W. Neuberger, "Concerning boundary value problems", Pacific J. Math. 10 (1960), 1385-1392. A. Zettl, Adjoint and self-adjoint problems with interface conditions., SIAM J. Applied Math. 16, (1968), 851-859.

[3] M. S. Robertson, "Ad jointness in nonadjoint boundary value problems", SIAM J. Applied Math. 17, (1969), 1268-1279.

[4] Q. Kong and A. Zettl, "Linear ordinary differential equations", WSSIAA v.3, (1994), (Special volume dedicated to Walter), Inequalities and Applications, edited by R. P. Agarwal, 381- 397.

[5] J. Weidmann, "Linear Operators in Hilbert Spaces", volume 68 of Graduate Texts in Mathematics. Springer Verlag, Berlin, 1980.

[6] P. Kosowski, "A Simple Proof Of The Spectral Continuity Of The Sturm–Liouville Problem", Symplicit Singularities And Geometry Of Gauge Fields, Banach Center Publications, Volume 39, Institute Of Mathematics, Polish Academy Of Sciences, Warszawa 1997.

[7] R. Courant and D. Hilbert, "Methods of Mathematical Physics", vol. 1, Intercedence, New York, 1953.

[8] P. Kosowski, "A Note on The Relative Error for The Eigenvalues Of The Sturm-Liouville Problem", Demonstration Mathematica, Vol. XXXII No 2 1999.