On some inequalities related to linear and bounded operators

Miruna -Daniela Roșu
UNIVERSITATEA TRANSILVANIA DIN BRAȘOV
Facultatea de : Matematică și Informatică
Specializarea: : Matematică și Informatică
EMAIL: miruna.rosu@student.unitbv.ro

Coord. Științific: CONF. DR. NICUȘOR MINCULETE
UNIVERSITATEA TRANSILVANIA DIN BRAȘOV
Facultatea de: Matematică și Informatică
Specializarea: Matematică și Informatică

Abstract

The starting point of this paper is the central results of the article by Al-Dolat and Jaradat, "A refinement of the Cauchy-Schwarz inequality accompanied by new numerical radius upper bounds". The purpose of this paper was to generalize the results obtained by them and to obtain an improvement of those inequalities. This aspect is concretely presented based on an example. An improvement of the inequality of means was used in the proofs, which led to some better results for inequalities on certain powers of numerical radius of some operators.

Keywords: *linear operator, bounded operator, numerical radius, inner product, norm, inequality*

Introducere

Fie $(E, +, \cdot_{\mathbb{C}})$ un spațiu vectorial. Aplicația $\langle\cdot,\cdot\rangle : E \times E \to \mathbb{C}$, numită ***produs scalar***, îndeplinește următoarele proprietăți:

- $\langle x, x\rangle \geq 0, (\forall)\, x \in E$ și $\langle x, x\rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$;
- $\langle x, y\rangle = \overline{\langle y, x\rangle}, (\forall)\, x, y \in E$;
- $(proprietatea\ de\ omogenitate)$: $\langle \alpha x, y\rangle = \alpha\langle x, y\rangle$ și $\langle x, \alpha y\rangle = \alpha\langle x, y\rangle, (\forall)\, x, y \in E, (\forall)\, \alpha \in C$;
- $(proprietatea\ de\ liniaritate)$: $\langle x1 + x2, y\rangle = \langle x1, y\rangle + \langle x2, y\rangle, (\forall)\, x1, x2, y \in E.$

Fie $(E, +, \cdot_K)$, unde $K = \mathbb{R}$ sau $K = \mathbb{C}$ un spațiu vectorial. Aplicația $\|\cdot\|: E \to \mathbb{R}_+ = [0, +\infty)$, numită ***normă***, are următoarele proprietăți:

- $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$;
- $(inegalitatea\ triunghiului\ \triangle)$: $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|, (\forall)\, x, y \in E$;
- $\|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|, (\forall)\, x \in E, (\forall)\, \lambda \in K.$

$\Rightarrow$ ***E* = spațiu liniar normat peste *K***

Lema 1. (Inegalitatea Cauchy-Schwarz)

$$|\langle x, y\rangle|^2 \leq \|x\|^2 \cdot \|y\|^2 \Leftrightarrow |\langle x, y\rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\|, (\forall)\, x, y \in E \tag{C-S}$$

Un ***spațiu Hilbert*** este un spațiu Banach în care norma este dată de un produs scalar, adică există produsul scalar $\langle\cdot,\cdot\rangle$ astfel încât:

$$\sqrt{\langle x, x\rangle} = \|x\| \Leftrightarrow \langle x, x\rangle = \|x\|^2, (\forall)\, x \in E$$

ISSN

Definiția 1.

Fie H un spațiu Hilbert peste corpul K. O funcție $A : H \to H$ se numește ***operator liniar*** și o notăm $A \in \mathcal{L}(H)$ dacă îndeplinește următoarele condiții:

- $A(x + y) = A(x) + A(y), (\forall)\ x, y \in H;$
- $A(\alpha x) = \alpha A(x), (\forall)\ x \in H, (\forall)\ \alpha \in K.$

În continuare, vom utiliza și următoarea notație: $A(x) = Ax$.

Definiția 2.

Un operator $A \in \mathcal{L}(H)$ se numește ***operator mărginit*** dacă $(\exists)\ M > 0$ astfel încât
$\|Ax\| \leq M\|x\|, (\forall)\ x \in H$.
Vom nota cu $\mathcal{B}(H)$ mulțimea operatorilor liniari și mărginiți definiți pe un spațiu Hilbert complex H.

Secțiunea preliminară

Definiția 3.

Cea mai mică constantă M cu proprietatea $\|Ax\| \leq M\|x\|$ se numește ***norma operatorului A*** și se notează $\|A\|$.

$$\|A\| = \sup_{\|x\| = 1} \|Ax\|.$$

Definiția 4.

Fie $A \in \mathcal{B}(H)$ un operator liniar și mărginit. Se numește ***raza numerică a operatorului A*** numărul

$$\omega(A) = \sup_{\|x\| = 1} |\langle Ax, x\rangle|.$$

Definiția 5.

Fie $A \in \mathcal{B}(H)$ un operator liniar și mărginit. Se numește ***numărul Crawford al operatorului A*** numărul

$$c(A) = \inf_{\|x\| = 1} |\langle Ax, x\rangle|.$$

Inegalități fundamentale:

Mai jos sunt prezentate câteva inegalități fundamentale pentru $\|A\|$, $\omega(A)$ și $c(A)$:

$$\|Ax\| \leq \|A\| \cdot \|x\|, (\forall)\ A \in B(H), (\forall)\ x \in H \tag{1}$$

$$|\langle Ax, x\rangle| \leq \omega(A) \cdot \|x\|^2, (\forall)\ A \in B(H), (\forall)\ x \in H \tag{2}$$

$$|\langle Ax, x\rangle| \geq c(A) \cdot \|x\|^2, (\forall)\ A \in B(H), (\forall)\ x \in H \tag{3}$$

$$\sup_{\|x\| = \|y\| = 1} |\langle Ax, y\rangle| = \|A\|, (\forall)\ A \in B(H) \tag{4}$$

$$\|Ax\|^p = \langle Ax, Ax\rangle^{\frac{p}{2}} = \sqrt{\langle A^*Ax, x\rangle}^p = \sqrt{\langle |A|^2 x, x\rangle}^p, (\forall)\ A \in B(H), (\forall)\ x \in H, (\forall)\ p \in \mathbb{R} \tag{5}$$

Proprietatea 1.

[1] Dacă $A \in \mathcal{B}(H)$ este un operator normal, adică $A^*A = AA^*$, atunci are loc egalitatea:

$$\|A\|^p = \|A^p\|, (\forall)\ p \in \mathbb{N}^*. \tag{6}$$

Inegalități

Teorema 1.

Fie $A \in \mathcal{B}(H)$. Atunci avem următoarea dublă inegalitate: $\omega(A) \overset{(I1)}{\leq} \|A\| \overset{(I2)}{\leq} 2\omega(A)$, care justifică, de asemenea, faptul că $\omega(A)$ este o normă echivalentă cu $\|A\|$.

Inegalitatea $I1$ se demonstrează imediat aplicând inegalitatea Cauchy-Schwarz:

$$|\langle Ax, x\rangle| \overset{(C-S)}{\leq} \|Ax\| \cdot \|x\| \overset{(1)}{\leq} \|A\| \cdot \|x\|^2 \tag{7}$$

Trecând la $\sup\limits_{\|x\|=1}$, obținem: $\omega(A) \leq \|A\|$, adică $I1$. ■

Observația 1.
Există $\theta \in \mathbb{R}$ astfel încât $|\langle x, y\rangle| = e^{i\theta}\langle x, y\rangle$.

Proprietatea 2.
Pentru orice operator $A \in \mathcal{B}(H)$ are loc următoarea inegalitate: $\omega(A^2) \leq \omega^2(A)$.

Definiția 6.
Un operator $A \in \mathcal{B}(H)$ se numește ***pozitiv*** dacă $\langle Ax, x\rangle \geq 0, (\forall)\ x \in H$.

Observația 2.
Evident, ***orice operator pozitiv este autoadjunct***, adică $A = A^*$. Mai mult, ***orice operator autoadjunct este normal***, adică $A^*A = AA^*$, deci are loc (6). De asemenea, pentru orice $A \in \mathcal{B}(H)$, operatorii $A^*A = |A|^2$ și $AA^* = |A^*|^2$ sunt pozitivi. În plus, $|A|^{2p}$ și $|A^*|^{2p}$ sunt ***operatori pozitivi***, $(\forall)\ p \geq 0$, și bineînțeles că suma lor este un operator pozitiv, de unde rezultă că:

$$0 \leq \langle(|A|^{2p} + |A^*|^{2p})x, x\rangle = |\langle(\ |A|^{2p} + |A^*|^{2p})x, x\rangle| \overset{(7)}{\leq} \||A|^{2p} + |A^*|^{2p}\| \cdot \|x\|^2. \tag{8}$$

Introducem mai jos câteva rezultate importante care vor fi utilizate în demonstrațiile ulterioare.

Lema 2. (Inegalitatea Hölder-McCarthy) [2]
Fie $A \in \mathcal{B}(H)$ un operator pozitiv și $x \in H$ cu proprietatea că $\|x\| = 1$. Dacă $r \geq 1$, avem că:

$$\langle Ax, x\rangle^r \leq \langle A^r x, x\rangle.$$

Lema 3.
Fie o funcție f negativă și convexă pe intervalul $[0, \infty)$ și $A, B \in \mathcal{B}(H)$ doi operatori pozitivi. Atunci:

$$\left\| f\left(\frac{A+B}{2}\right)\right\| \leq \left\|\frac{f(A)+f(B)}{2}\right\|$$

Observația 3.
Funcția $f: I \to \mathbb{R}, f(x) = x^p$ este convexă pentru $(\forall)\ p \geq 1$ și atunci are loc următoarea inegalitate:

$$(\lambda x + (1-\lambda)y)^p \leq \lambda x^p + (1-\lambda)y^p, (\forall)\ x, y \in I, (\forall)\ \lambda \in (0,1).$$

În cazul particular, pentru $\lambda = \frac{1}{2}$, avem că:

$$\left(\frac{x+y}{2}\right)^p \leq \frac{x^p + y^p}{2} \Leftrightarrow (x+y)^p \leq 2^{p-1}(x^p + y^p), (\forall)\ x, y \in I.$$

Lema 4.

Fie $A \in \mathcal{B}(H)$. Atunci pentru $(\forall)\ x, y \in H$ avem: $|\langle Ax, y\rangle|^2 \leq \langle |A|x, x\rangle \cdot \langle |A^*|y, y\rangle$ |, unde A^* este operatorul adjunct al lui A, iar $|A| = (A^*A)^{\frac{1}{2}}$ este valoarea absolută a lui A.

Lema 5.

(Dragomir în [3]) Fie $A, B \in \mathcal{B}(H)$ și $r \geq 1$. Atunci: $\omega^r(B^*A) \leq \frac{1}{2}\||A|^{2r} + |B|^{2r}\|$.

Lema 6. (Inegalitatea Buzano, extindere a inegalității Cauchy-Schwarz)

Fie $a, b, e \in H$ cu $\|e\| = 1$. Atunci:

$$|\langle a, e\rangle\langle e, b\rangle| \leq \frac{1}{2}(\|a\|\|b\| + |\langle a, b\rangle|).$$

Lema 7. (Al-Dolat și Jaradat în [4]**)**

Fie $a, b \in H$. Pentru $(\forall)\ \alpha \geq 0$ are loc:

$$|\langle a, b\rangle|^2 \leq \frac{1}{\alpha+1}\|a\|\|b\||\langle a, b\rangle| + \frac{\alpha}{\alpha+1}\|a\|^2\|b\|^2 \leq \|a\|^2\|b\|^2. \quad (9)$$

Rezultate principale

Observația 4.

Din inegalitatea mediilor ($GM \leq AM$) și din cazul particular al Observației 3, obținem:

$$\sqrt{ab}^p = \sqrt{a^p b^p} \leq \left(\frac{a+b}{2}\right)^p = \frac{1}{2^p}(a+b)^p \leq \frac{a^p+b^p}{2}. \quad (10)$$

Lema 8.

Fie $a, b \geq 0$ și $p \geq 1$. Atunci are loc următoarea inegalitate, care reprezintă de fapt o îmbunătățire a inegalității mediilor ($GM \leq AM$):

$$(ab)^p \leq \frac{1}{2^p}(a^2 + b^2)^p - \frac{1}{2^p}(a-b)^{2p}. \quad (11)$$

Schemă de demonstrație:

Considerăm funcția $f: [1, +\infty) \to \mathbb{R}, f(t) = t^p - 1 - (t-1)^p, p \geq 1$.

Deoarece $f'(t) \geq 0$, $(\forall)\ t \geq 1$, $(\forall)\ p \geq 1 \implies f$ este crescătoare $\implies t^p - 1 \geq (t-1)^p$, $(\forall)\ t \geq 1, (\forall)\ p \geq 1$.

Fie $\alpha \geq \beta > 0 \Rightarrow \frac{\alpha}{\beta} \geq 1$. Facem substituția $t = \frac{\alpha}{\beta}$ și obținem că are loc inegalitatea:

$$\alpha^p - \beta^p \geq (\alpha - \beta)^p, (\forall)\ \alpha, \beta \geq 0, \alpha \geq \beta.$$

Considerăm $\alpha = \frac{a^2+b^2}{2}, \beta = \frac{(a-b)^2}{2}$, cu $a, b \geq 0$, $a \neq b$:

$$\left(\frac{a^2+b^2}{2}\right)^p - \left(\frac{(a-b)^2}{2}\right)^p \geq \left(\frac{a^2+b^2}{2} - \frac{(a-b)^2}{2}\right)^p \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\ (ab)^p \leq \frac{1}{2^p}(a^2+b^2)^p - \frac{1}{2^p}(a-b)^{2p}.$$

În cazul particular când $a = b$, obținem egalitate în (11).

Prin urmare inegalitatea (11) are loc $(\forall)\ a, b \geq 0, (\forall)$ p ≥ 1. ■

Lema 9. (Generalizare a Lemei 7)

Fie $a, b \in H$. Pentru $(\forall)\ \alpha \geq 0$ și $(\forall)\ p \geq 1$ are loc:

$$|\langle a,b\rangle|^{2p} \leq \frac{1}{\alpha+1}\|a\|^p\|b\|^p|\langle a,b\rangle|^p + \frac{\alpha}{\alpha+1}\|a\|^{2p}\|b\|^{2p} \leq \|a\|^{2p}\|b\|^{2p}. \quad (12)$$

Demonstrație:

Prin ridicarea la puterea p a inegalității (9) obținem:

$$|\langle a,b\rangle|^{2p} \leq \left(\frac{1}{\alpha+1}\|a\|\|b\||\langle a,b\rangle| + \frac{\alpha}{\alpha+1}\|a\|^2\|b\|^2\right)^p.$$

În Observația 3, înlocuind $\lambda = \frac{1}{\alpha+1}$, $x = \|a\|\|b\||\langle a,b\rangle|$ și $y = \|a\|^2\|b\|^2$, obținem că:

$$\left(\frac{1}{\alpha+1}\|a\|\|b\||\langle a,b\rangle| + \frac{\alpha}{\alpha+1}\|a\|^2\|b\|^2\right)^p \leq \frac{1}{\alpha+1}\|a\|^p\|b\|^p|\langle a,b\rangle|^p + \frac{\alpha}{\alpha+1}\|a\|^{2p}\|b\|^{2p}.$$

Astfel, am demonstrat prima inegalitate.

Mai departe, utilizând Inegalitatea lui Cauchy (C-S) pe care o ridicăm la puterea p ($|\langle x,y\rangle|^p \leq \|x\|^p \cdot \|y\|^p$), vom obține rezultatul final, adică:

$$|\langle a,b\rangle|^{2p} \leq \frac{1}{\alpha+1}\|a\|^p\|b\|^p|\langle a,b\rangle|^p + \frac{\alpha}{\alpha+1}\|a\|^{2p}\|b\|^{2p} \leq \|a\|^{2p}\|b\|^{2p}. \ ■$$

Lema 10. (Generalizare a inegalității Buzano (Lema 6))

Fie $a, b, e \in H$ cu $\|e\| = 1$. Pentru $(\forall)\ \alpha \geq 0$ și $(\forall)\ p \geq 1$ are loc:

$$|\langle a,e\rangle\langle e,b\rangle|^{2p} \leq \frac{2\alpha+1}{2\alpha+2}\|a\|^{2p}\|b\|^{2p} + \frac{1}{2\alpha+2}\|a\|^p\|b\|^p|\langle a,b\rangle|^p. \quad (13)$$

Demonstrație:

Pornim de la Lema 6 pe care o ridicăm la puterea $2p$ și obținem astfel:

$$|\langle a,e\rangle\langle e,b\rangle|^{2p} \leq \frac{1}{2^{2p}}(\|a\|\|b\| + |\langle a,b\rangle|)^{2p}.$$

Utilizând inegalitatea din Observația 3 pentru $p \to 2p$ și $\lambda = \frac{1}{2}$ vom avea că:

$$(\|a\|\|b\| + |\langle a,b\rangle|)^{2p} \leq 2^{2p-1}(\|a\|^{2p}\|b\|^{2p} + |\langle a,b\rangle|^{2p}).$$

Deci, $|\langle a,e\rangle\langle e,b\rangle|^{2p} \leq \frac{1}{2^{2p}}2^{2p-1}\left(\|a\|^{2p}\|b\|^{2p} + |\langle a,b\rangle|^{2p}\right) \leq \frac{1}{2}\left(\|a\|^{2p}\|b\|^{2p} + |\langle a,b\rangle|^{2p}\right)$.

Pentru a obține însă rezultatul enunțat, utilizăm Lema 9:

$$|\langle a,e\rangle\langle e,b\rangle|^{2p} \le \frac{1}{2}\left(\|a\|^{2p}\|b\|^{2p} + |\langle a,b\rangle|^{2p} + \frac{1}{\alpha+1}\|a\|^{p}\|b\|^{p}|\langle a,b\rangle|^{p} + \frac{\alpha}{\alpha+1}\|a\|^{2p}\|b\|^{2p}\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow |\langle a,e\rangle\langle e,b\rangle|^{2p} \le \frac{2\alpha+1}{2\alpha+2}\|a\|^{2p}\|b\|^{2p} + \frac{1}{2\alpha+2}\|a\|^{p}\|b\|^{p}|\langle a,b\rangle|^{p}. \blacksquare$$

Observația 5.

Particularizând pentru p=1 rezultatul anterior, obținem următoarea inegalitate, prezentată de Mohammed Al-Dolat și Imad Jaradat în [4]:

$$|\langle a,e\rangle\langle e,b\rangle|^{2} \le \frac{2\alpha+1}{2\alpha+2}\|a\|^{2}\|b\|^{2} + \frac{1}{2\alpha+2}\|a\|\|b\||\langle a,b\rangle|.$$

Teorema 2.

Fie $A \in \mathcal{B}(H)$. Atunci pentru $(\forall)\ \alpha \ge 0$ și $(\forall)\ p \ge 1$ are loc inegalitatea:

$$\omega^{4p}(A) \le \frac{1}{2^p}\left(\frac{2\alpha+1}{2\alpha+2}\||A|^4 + |A^*|^4\|^p + \frac{1}{2\alpha+2}\||A|^2 + |A^*|^2\|^p\omega^p(A^2)\right) - \frac{2\alpha+1}{2\alpha+2}\cdot\frac{1}{2^p}c^{2p}(|A|^2 - |A^*|^2). \quad (14)$$

Demonstrație:

Dacă în Lema 10 considerăm $e = x, a = Ax, b = A^*x$, atunci avem că:

$$|\langle Ax,x\rangle\langle x,A^*x\rangle|^{2p} \le \frac{2\alpha+1}{2\alpha+2}\|Ax\|^{2p}\|A^*x\|^{2p} + \frac{1}{2\alpha+2}\|Ax\|^{p}\|A^*x\|^{p}|\langle Ax,A^*x\rangle|^{p} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow |\langle Ax,x\rangle|^{4p} \overset{(5)}{\le} \frac{2\alpha+1}{2\alpha+2}\langle |A|^2x,x\rangle^p\langle |A^*|^2x,x\rangle^p + \frac{1}{2\alpha+2}\sqrt{\langle |A|^2x,x\rangle}^{\,p}\sqrt{\langle |A^*|^2x,x\rangle}^{\,p}|\langle A^2x,x\rangle|^p.$$

Mai departe, utilizăm inegalitățile (10) (pentru $a = \langle |A|^2x,x\rangle$ și $b = \langle |A^*|^2x,x\rangle$) și (11) și obținem că:

$$|\langle Ax,x\rangle|^{4p} \underset{(11)}{\overset{(10)}{\le}} \frac{2\alpha+1}{2\alpha+2}\cdot\left[\frac{1}{2^p}(\langle |A|^2x,x\rangle^2 + \langle |A^*|^2x,x\rangle^2)^p - \frac{1}{2^p}(\langle |A|^2x,x\rangle - \langle |A^*|^2x,x\rangle)^{2p}\right] +$$

$$+\frac{1}{2\alpha+2}\cdot\frac{1}{2^p}(\langle |A|^2x,x\rangle + \langle |A^*|^2x,x\rangle)^p\cdot|\langle A^2x,x\rangle|^p \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow |\langle Ax,x\rangle|^{4p} + \frac{2\alpha+1}{2\alpha+2}\cdot\frac{1}{2^p}\langle(|A|^2 - |A^*|^2)x,x\rangle^{2p} \le$$

$$\le \frac{2\alpha+1}{2\alpha+2}\cdot\frac{1}{2^p}(\langle |A|^2x,x\rangle^2 + \langle |A^*|^2x,x\rangle^2)^p + \frac{1}{2\alpha+2}\cdot\frac{1}{2^p}(\langle |A|^2x,x\rangle + \langle |A^*|^2x,x\rangle)^p\cdot|\langle A^2x,x\rangle|^p \underset{McCarthy}{\overset{Lema\ 2}{\le}}$$

$$\le \frac{2\alpha+1}{2\alpha+2}\cdot\frac{1}{2^p}(\langle |A|^4x,x\rangle + \langle |A^*|^4x,x\rangle)^p + \frac{1}{2\alpha+2}\cdot\frac{1}{2^p}(\langle |A|^2x,x\rangle + \langle |A^*|^2x,x\rangle)^p\cdot|\langle A^2x,x\rangle|^p \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow |\langle Ax,x\rangle|^{4p} + \frac{2\alpha+1}{2\alpha+2}\cdot\frac{1}{2^p}\langle(|A|^2 - |A^*|^2)x,x\rangle^{2p} \le$$

$$\le \frac{1}{2^p}\left(\frac{2\alpha+1}{2\alpha+2}\langle(|A|^4 + |A^*|^4)x,x\rangle^p + \frac{1}{2\alpha+2}\langle(|A|^2 + |A^*|^2)x,x\rangle^p|\langle A^2x,x\rangle|^p\right).$$

În continuare, aplicăm inegalitățile (2), (3) și (8) și obținem că:

$$|\langle Ax,x\rangle|^{4p} + \frac{2\alpha+1}{2\alpha+2}\cdot\frac{1}{2^p}c^{2p}(|A|^2 - |A^*|^2)\|x\|^{4p} \le$$

$$\le \frac{1}{2^p}\left(\frac{2\alpha+1}{2\alpha+2}\||A|^4 + |A^*|^4\|^p\|x\|^{2p} + \frac{1}{2\alpha+2}\||A|^2 + |A^*|^2\|^p\|x\|^{2p}\omega^p(A^2)\|x\|^{2p}\right).$$

Trecem în inegalitatea anterioară la $\sup\limits_{\|x\|=1}$ și obținem rezultatul enunțat anterior:

$$\omega^{4p}(A) \le \frac{1}{2^p}\left(\frac{2\alpha+1}{2\alpha+2}\left\||A|^4+|A^*|^4\right\|^p + \frac{1}{2\alpha+2}\left\||A|^2+|A^*|^2\right\|^p\omega^p(A^2)\right) - \\ -\frac{2\alpha+1}{2\alpha+2}\cdot\frac{1}{2^p}c^{2p}(|A|^2-|A^*|^2). \blacksquare$$

Observația 6.
Înlocuind $p = 1$ în rezultatul de mai sus, obținem o îmbunătățire pentru următoarea inegalitate prezentată de M. Al-Dolat și I. Jaradat în [4]: (îmbunătățirea constă în termenul marcat cu roșu)

$$\omega^4(A) \le \frac{2\alpha+1}{4\alpha+4}\left\||A|^4+|A^*|^4\right\| + \frac{1}{4\alpha+4}\left\||A|^2+|A^*|^2\right\|\omega(A^2) - \frac{2\alpha+1}{4\alpha+4}c^2(|A|^2-|A^*|^2).$$

Observația 7.
În Teorema 2, egalitatea are loc dacă A este operator normal.

Corolarul 1.
Fie $A \in \mathcal{B}(H)$. Pentru $(\forall)$ $\alpha \ge 0$ și $(\forall)$ $p \in \mathbb{N}^*$ are loc:

$$\omega^{4p}(A) \le \frac{1}{2^p}\left(\frac{2\alpha+1}{2\alpha+2}\left\||A|^4+|A^*|^4\right\|^p + \frac{1}{2\alpha+2}\left\||A|^2+|A^*|^2\right\|^p\omega^p(A^2)\right) \le \\ \le \frac{1}{2}\left(\frac{2\alpha+1}{2\alpha+2}\left\||A|^{4p}+|A^*|^{4p}\right\| + \frac{1}{2\alpha+2}\left\||A|^{2p}+|A^*|^{2p}\right\|\omega^p(A^2)\right) \le \frac{1}{2}\left\||A|^{4p}+|A^*|^{4p}\right\|.$$

Demonstrație:
Din Teorema 2, avem că:

$$\omega^{4p}(A) \le \frac{1}{2^p}\left(\frac{2\alpha+1}{2\alpha+2}\left\||A|^4+|A^*|^4\right\|^p + \frac{1}{2\alpha+2}\left\||A|^2+|A^*|^2\right\|^p\omega^p(A^2)\right) - \frac{2\alpha+1}{2\alpha+2}\cdot\frac{1}{2^p}c^{2p}(|A|^2-|A^*|^2)$$

$$\Rightarrow \omega^{4p}(A) \le \frac{1}{2^p}\left(\frac{2\alpha+1}{2\alpha+2}\left\||A|^4+|A^*|^4\right\|^p + \frac{1}{2\alpha+2}\left\||A|^2+|A^*|^2\right\|^p\omega^p(A^2)\right).$$

În continuare,

$$\frac{1}{2^p}\left(\frac{2\alpha+1}{2\alpha+2}\left\||A|^4+|A^*|^4\right\|^p + \frac{1}{2\alpha+2}\left\||A|^2+|A^*|^2\right\|^p\omega^p(A^2)\right) \overset{(6)}{=} \\ = \frac{1}{2^p}\left(\frac{2\alpha+1}{2\alpha+2}\left\|(|A|^4+|A^*|^4)^p\right\| + \frac{1}{2\alpha+2}\left\|(|A|^2+|A^*|^2)^p\right\|\omega^p(A^2)\right) \underset{f(x)=x^p \text{ convexă}}{\overset{Lema\ 3}{\le}} \\ \le \frac{1}{2^p}\left(\frac{2\alpha+1}{2\alpha+2}2^{p-1}\left\||A|^{4p}+|A^*|^{4p}\right\| + \frac{1}{2\alpha+2}2^{p-1}\left\||A|^{2p}+|A^*|^{2p}\right\|\omega^p(A^2)\right) = \\ = \frac{1}{2}\left(\frac{2\alpha+1}{2\alpha+2}\left\||A|^{4p}+|A^*|^{4p}\right\| + \frac{1}{2\alpha+2}\left\||A|^{2p}+|A^*|^{2p}\right\|\omega^p(A^2)\right).$$

Mai departe, utilizăm Lema 5 pentru $B = A^*$ și $r = p$, adică $\omega^p(A^2) \leq \frac{1}{2}\||A|^{2p} + |A^*|^{2p}\|$ și rezultă că:

$$\frac{1}{2}\left(\frac{2\alpha+1}{2\alpha+2}\||A|^{4p} + |A^*|^{4p}\| + \frac{1}{2\alpha+2}\||A|^{2p} + |A^*|^{2p}\|\omega^p(A^2)\right) \overset{Lema\ 5}{\leq}$$
$$\leq \frac{2\alpha+1}{4\alpha+4}\||A|^{4p} + |A^*|^{4p}\| + \frac{1}{4\alpha+4}\||A|^{2p} + |A^*|^{2p}\|\frac{1}{2}\||A|^{2p} + |A^*|^{2p}\| =$$
$$= \frac{2\alpha+1}{4\alpha+4}\||A|^{4p} + |A^*|^{4p}\| + \frac{1}{8\alpha+8}\||A|^{2p} + |A^*|^{2p}\|^2 \overset{(6)}{=}$$
$$= \frac{2\alpha+1}{4\alpha+4}\||A|^{4p} + |A^*|^{4p}\| + \frac{1}{8\alpha+8}\|(|A|^{2p} + |A^*|^{2p})^2\|.$$

Considerăm funcția $f: [0, \infty) \to \mathbb{R}, f(x) = x^2$, care este convexă și nenegativă și în condițiile Lemei 3, avem:

$$\frac{2\alpha+1}{4\alpha+4}\||A|^{4p} + |A^*|^{4p}\| + \frac{1}{8\alpha+8}\|(|A|^{2p} + |A^*|^{2p})^2\| \overset{Lema\ 3}{\leq}$$
$$\leq \frac{2\alpha+1}{4\alpha+4}\||A|^{4p} + |A^*|^{4p}\| + \frac{1}{4\alpha+4}\||A|^{4p} + |A^*|^{4p}\| = \frac{1}{2}\||A|^{4p} + |A^*|^{4p}\|. \blacksquare$$

Observația 8.

Corolarul 1 este o generalizare a următorului rezultat din [4], obținut atunci când $p = 1$:

$$\omega^4(A) \leq \frac{1}{2}\left(\frac{2\alpha+1}{2\alpha+2}\||A|^4 + |A^*|^4\| + \frac{1}{2\alpha+2}\||A|^2 + |A^*|^2\|\omega(A^2)\right) \leq \frac{1}{2}\||A|^4 + |A^*|^4\|.$$

Teorema 3.

Fie $A, B \in \mathcal{B}(H)$. Pentru $(\forall)\ \alpha \geq 0$ și $(\forall)\ p \geq 1$ are loc inegalitatea:

$$\omega^{2p}(B^*A) \leq \frac{1}{2^p}\left(\frac{1}{\alpha+1}\||A|^2 + |B|^2\|^p\omega^p(B^*A) + \frac{\alpha}{\alpha+1}\||A|^4 + |B|^4\|^p\right) - \frac{\alpha}{\alpha+1}\cdot\frac{1}{2^p}c^{2p}(|A|^2 - |B|^2).$$

Observație:

Dacă în Lema 9 considerăm $a = Ax$ și $b = Bx$, atunci avem că:

$$|\langle Ax, Bx\rangle|^{2p} \leq \frac{1}{\alpha+1}\|Ax\|^p\|Bx\|^p|\langle Ax, Bx\rangle|^p + \frac{\alpha}{\alpha+1}\|Ax\|^{2p}\|Bx\|^{2p}.$$

Mai departe, în demonstrația acestei teoreme se utilizează pașii din demonstrația Teoremei 2.

Observația 9.

Pentru $p = 1$ se obține o îmbunătățire a următorului rezultat din [4]: (îmbunătățirea constă în termenul marcat cu roșu)

$$\omega^2(B^*A) \leq \frac{1}{2\alpha+2}\||A|^2 + |B|^2\|\omega(B^*A) + \frac{\alpha}{2\alpha+2}\||A|^4 + |B|^4\| - \frac{\alpha}{2\alpha+2}\cdot c^2(|A|^2 - |B|^2).$$

Corolarul 2.

Fie $A, B \in \mathcal{B}(H)$. Pentru $(\forall)\ \alpha \geq 0$ și $(\forall)\ p \in \mathbb{N}^*$ are loc:

$$\omega^{2p}(B^*A) \leq \frac{1}{2^p}\left(\frac{1}{\alpha+1}\||A|^2 + |B|^2\|^p\omega^p(B^*A) + \frac{\alpha}{\alpha+1}\||A|^4 + |B|^4\|^p\right) \leq$$
$$\leq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\alpha+1}\||A|^{2p} + |B|^{2p}\|\omega^p(B^*A) + \frac{\alpha}{\alpha+1}\||A|^{4p} + |B|^{4p}\|\right) \leq \frac{1}{2}\||A|^{4p} + |B|^{4p}\|.$$

Acest corolar se demonstrează în mod similar cu primul corolar.

Observația 10.

Corolarul 2 este o generalizare a următorului rezultat din [4], obținut atunci când $p = 1$:

$$\omega^2(B^*A) \leq \frac{1}{2\alpha+2}\||A|^2+|B|^2\|\omega(B^*A)+\frac{\alpha}{2\alpha+2}\||A|^4+|B|^4\| \leq \frac{1}{2}\||A|^4+|B|^4\|.$$

Teorema 4.

Fie $A \in \mathcal{B}(H)$, $\alpha \in [0,1]$. Pentru $(\forall)\ p \geq 1$ are loc inegalitatea:

$$\omega^{2p}(A) \leq \frac{1}{2^p}\left(\alpha\||A|^2+|A^*|^2\|^p+(1-\alpha)\omega^p(A)\||A|+|A^*|\|^p\right)-\alpha\frac{1}{2^p}c^{2p}(|A|-|A^*|).$$

Observație:

Cum $\alpha \in [0,1]$, avem:

$$|\langle Ax,x\rangle|^{2p} = \alpha|\langle Ax,x\rangle|^{2p}+(1-\alpha)|\langle Ax,x\rangle|^{2p} \underset{x=y}{\overset{Lema\ 4}{\leq}}$$

$$\leq \alpha\langle |A|x,x\rangle^p\langle |A^*|x,x\rangle^p+(1-\alpha)|\langle Ax,x\rangle|^p\sqrt{\langle |A|x,x\rangle}^p\sqrt{\langle |A^*|x,x\rangle}^p.$$

Mai departe, în demonstrația acestei teoreme se utilizează pașii din demonstrația Teoremei 2.

Observația 11.

Pentru $p = 1$ avem o îmbunătățire a următoarei inegalități, rezultat prezent în lucrarea [4]: (îmbunătățirea constă în termenul marcat cu roșu)

$$\omega^2(A) \leq \frac{\alpha}{2}\||A|^2+|A^*|^2\|+\frac{1-\alpha}{2}\omega(A)\||A|+|A^*|\|-\frac{\alpha}{2}c^2(|A|-|A^*|).$$

Observația 12.

În Teorema 4, egalitatea are loc dacă A este operator normal.

Observația 13.

În [5], F. Kittaneh a demonstrat următorul rezultat: $\omega(A) \leq \frac{1}{2}\||A|+|A^*|\|$, pentru $(\forall)\ A \in \mathcal{B}(H)$.

Ridicăm inegalitatea de mai sus la puterea p, cu $p \geq 1$:

$$\omega^p(A) \leq \frac{1}{2^p}\||A|+|A^*|\|^p \overset{(6)}{=} \frac{1}{2^p}\|(|A|+|A^*|)^p\| \overset{Lema\ 3}{\leq} \frac{1}{2^p}2^{p-1}\||A|^p+|A^*|^p\| \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \omega^p(A) \leq \frac{1}{2}\||A|^p+|A^*|^p\|. \qquad (15)$$

Corolarul 3.

Fie $A \in \mathcal{B}(H)$, $\alpha \in [0,1]$. Pentru $(\forall)\ p \in \mathbb{N}^*$ are loc:

$$\omega^{2p}(A) \leq \frac{1}{2^p}\left(\alpha\||A|^2+|A^*|^2\|^p+(1-\alpha)\omega^p(A)\||A|+|A^*|\|^p\right) \leq$$

$$\leq \frac{1}{2}(\alpha\||A|^{2p}+|A^*|^{2p}\|+(1-\alpha)\omega^p(A)\||A|^p+|A^*|^p\|) \leq \frac{1}{2}\||A|^{2p}+|A^*|^{2p}\|.$$

Acest corolar se demonstrează în mod similar cu primul corolar.

Observația 14.

Corolarul 3 este o generalizare a următorului rezultat din [4], obținut atunci când $p = 1$:

$$\omega^2(A) \leq \frac{\alpha}{2}\||A|^2+|A^*|^2\|+\frac{1-\alpha}{2}\omega(A)\||A|+|A^*|\| \leq \frac{1}{2}\||A|^2+|A^*|^2\|.$$

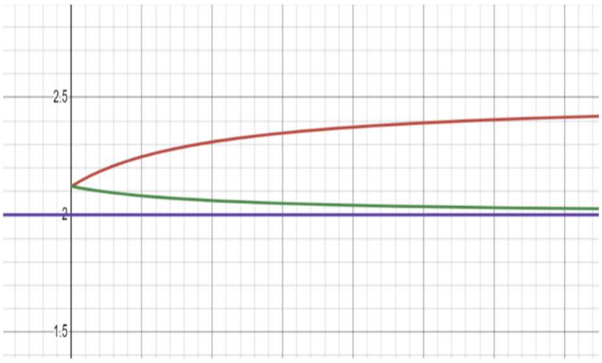

Fig. 1. Autor: Roşu Miruna-Daniela, Soft matematic: Desmos

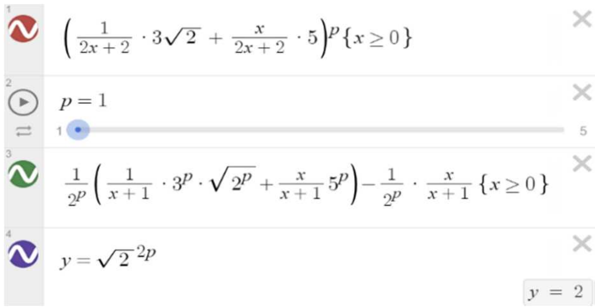

Fig. 2. Autor: Roşu Miruna-Daniela, Soft matematic: Desmos

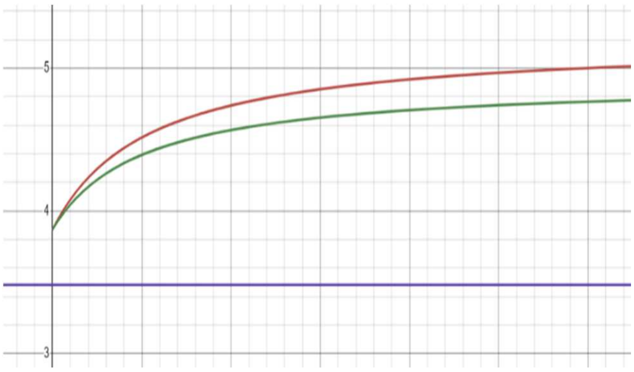

Fig. 3. Autor: Roşu Miruna-Daniela, Soft matematic: Desmos

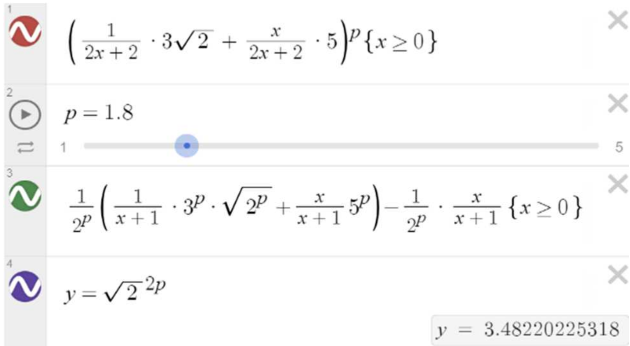

Fig. 4. Autor: Roşu Miruna-Daniela, Soft matematic: Desmos

Concluzii

Considerăm operatorii matriceali $A, B \in \mathcal{B}(\mathbb{C}^2)$, unde: $A = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 \\ 0 & -\sqrt{2} \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Obținem faptul că $\||A|^2 + |B|^2\| = 3$, $\||A|^4 + |B|^4\| = 5$, $\omega(B^*A) = \sqrt{2}$, și $c(|A|^2 - |B|^2) = 1$.
Conform lui Al-Dolat și Jaradat, următoarea inegalitate este adevărată:

$$\omega^2(B^*A) \leq \frac{1}{2\alpha+2}\||A|^2 + |B|^2\|\omega(B^*A) + \frac{\alpha}{2\alpha+2}\||A|^4 + |B|^4\|. \tag{16}$$

ceea ce conduce la:

$$\omega^2(B^*A) \leq \frac{1}{2\alpha+2}\cdot 3\sqrt{2} + \frac{\alpha}{2\alpha+2}\cdot 5 \Longrightarrow \omega^{2p}(B^*A) \leq \left(\frac{1}{2\alpha+2}\cdot 3\sqrt{2} + \frac{\alpha}{2\alpha+2}\cdot 5\right)^p, \alpha \geq 0.$$

Pe de altă parte, din Teorema 3 obținem:

$$\omega^{2p}(B^*A) \leq \frac{1}{2^p}\left(\frac{1}{\alpha+1}\cdot 3^p \cdot \sqrt{2}^p + \frac{\alpha}{\alpha+1}\cdot 5^p\right) - \frac{1}{2^p}\cdot\frac{\alpha}{\alpha+1}, \alpha \geq 0.$$

Analizând graficele din figurile următoare, putem observa că pentru anumite valori ale lui p, inegalitatea din Teorema 3 este mai bună decât (16).

Bibliografie

1] D. K. M. Rao, K. E. Gustafson, Numerical Range, New York: Editura Springer, 1997.

2] McCarthy, „Cp,” *Israel J. Math.,* pp. 249-271, 1967.

3] S. S. Dragomir, „Power inequalities for the numerical radius of a product of two operators in Hilbert space,” *Sarajevo J. Math,* vol. vol. 5, pp. 269-278, 2009.

4] I. Jaradat, M. Al-Dolat, „A refinement of the Cauchy-Schwarz inequality accompanied by new numerical radius upper bounds,” *Filomat,* Vol. %1 din %2vol. 37, nr. 3, pp. 971-977, 2023.

5] F. Kittaneh, „A numerical radius inequality and an estimate for the numerical radius of the Frobenius companion matrix,” *Studia Math,* vol. vol. 158, pp. 11-17, 2003.

6] V. I. Istrățescu, Introducere în teoria operatorilor liniari, București: Editura Academiei Republicii Socialiste România, 1975.

7] P. Y. W. H.-L. G, Kuo-Zhong Wang, „Crawford number of powers of a matrix,” *Linear Algebra and its Applications,* 2010.